# 170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

**Cadre :** $\mathbb{K}$ est un corps avec $\operatorname{car}\mathbb{K} \neq 2$, $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
**Prérequis :** Algèbre linéaire, calcul différentiel

# I Généralités sur les formes quadratiques

## 1) Forme polaire

**Définition 1.** (i) On dit que $f : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire si elle est linéaire en ses deux variables.

(ii) $f$ est symétrique si $\forall x, y \in E, f(x,y) = f(y,x)$.

**Définition 2.** On dit que $q : E \to \mathbb{K}$ est quadratique s'il existe une forme bilinéaire symétrique $f : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in E, q(x) = f(x,x)$. $f$ est la forme polaire de $q$, et est unique si $\operatorname{car}\mathbb{K} \neq 2$.

**Proposition 3.** *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ identifié à $\mathbb{K}^n$. Alors toute forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$ est un polynôme homogène de degré 2 en ses coordonnées dans $\mathbb{B}$.*

**Définition 4.** On pose $A = (f(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice associée à $f$ dans la base $\mathcal{B}$. On note :

$$\overline{f} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^\star \\ y & \longmapsto & \overline{f}(y) : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On pose $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} \overline{f}$ que l'on appelle noyau de $q$, et $\operatorname{rg} q = \operatorname{rg} \overline{f}$ que l'on appelle rang de $q$.

**Proposition 5.** *On identifie $E$ à $\mathbb{K}^n$, alors :*

*(i)* $\forall x, y \in \mathbb{K}^n, f(x,y) = {}^t x A y$

*(ii)* *$A$ est symétrique*

*(iii)* $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} A$

*(iv)* $\operatorname{rg} q = \operatorname{rg} A$

**Proposition 6.** *Soit $\mathcal{B}'$ une base de $E$, et soit $A' = Mat_{\mathcal{B}'} f$. Soit $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $A' = {}^t PAP$.*

**Exemple 7.** *Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :*

$$q : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2 - y^2 - xy + yz \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad Mat_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2) Orthogonalité et isotropie

**Définition 8.** On dit que $q$ est non dégénérée si $N = \{0\}$.

**Définition 9.** (i) Pour $x \in E$ est orthogonal à $y \in E$ si $f(x,y) = 0$.

(ii) $A \subseteq E$ est orthogonale à $B \subseteq E$ si $\forall x \in A, \forall y \in B, f(x,y) = 0$.

(iii) On note $A^\perp = \left\{ y \in E \;\middle|\; \forall x \in A, f(x,y) = 0 \right\}$ l'orthogonal de $A$.

**Théorème 10.** *Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Supposons que $f$ est non dégénérée. Alors $\dim E^\perp = \dim E - \dim F$.*

**Proposition 11.** *Soient $V$ et $W$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors :*

*(i)* $(V^\perp)^\perp = V$

*(ii)* $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$

*(iii)* $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$

**Définition 12.** (i) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. $x$ est dit isotrope si $q(x) = 0$.

(ii) Un sous-espace vectoriel $V$ de $E$ est isotrope si $V \cap V^\perp = \{0\}$.

(iii) Un sous-espace vectoriel $V$ de $E$ est totalement isotrope (SETI) si $V \subseteq V^\perp$. Un tel sous-espace dit maximal (SETIM) s'il est maximal pour l'inclusion.

(iv) On appelle indice de $q$ la quantité :

$$\nu(q) = \max \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; k = \dim F,\ F \text{ totalement isotrope} \right\} \leqslant \frac{n}{2}$$

**Exemple 13.** *Si $V$ est un sous-espace vectoriel de $E$ non isotrope, et si $f$ est non dégénérée, alors $E = V \oplus V^\perp$.*

**Définition 14.** L'ensemble $C(q) = q^{-1}(\{0\})$ est appelé cône isotrope de $q$ . Il contient $\operatorname{Ker} q$.

**Exemple 15.** *Si $\operatorname{Ker} q \subsetneq C(q)$, alors $q$ est surjective.*

**Exemple 16.** *Si on pose* $q : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{array} \right.$ *, alors on a* $C(q) = \operatorname{Vect}\binom{1}{i} \cup \operatorname{Vect}\binom{1}{-i}$*, et ses SETIM sont* $\operatorname{Vect}\binom{1}{i}$ *et* $\operatorname{Vect}\binom{1}{-i}$.

**Définition 17.** Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est orthogonale si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ [i \neq j \Rightarrow f(e_i, e_j) = 0]$$

**Théorème 18** (Réduction de Gauss)**.** *Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique. Alors il existe $r \geqslant 1$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in E^\star$ libres tels que :*

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i(x)^2$$

**Corollaire 19.** *Dans le théorème précédent, on a en fait $r = \operatorname{rg} q$ et $\ker q = \bigcap_{i=1}^{r} \varphi^{-1}(\{0\})$. Ainsi, toute forme quadratique admet une base orthogonale pour sa forme polaire.*

# II Groupe orthogonal et classification des formes quadratiques

## 1) Introduction du groupe orthogonale

**Définition 20.** On appelle groupe orthogonal l'ensemble $O(q)$ défini par :

$$O(q) = \big\{u \in GL(E) \bigm| \forall x \in E,\, q(u(x)) = q(x)\big\}$$

Les éléments de $O(q)$ sont appelés les isométries de $E$ relativement à $q$.

**Proposition 21.** *$O(q)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.*

**Proposition 22.** *On a également :*

$$O(q) = \big\{u \in GL(E) \bigm| \forall x, y \in E, f(u(x), u(y)) = f(x, y)\big\}$$

**Proposition 23.** *On identifie $E$ à $\mathbb{K}^n$. Si on note $A$ la matrice de $q$ dans une base, alors :*

$$O(q) = \big\{P \in GL_n(\mathbb{K}) \bigm| {}^{\mathrm{t}}PAP = A\big\}$$

**Définition 24.** Soient $f, f' : E \times E \to \mathbb{K}$ deux formes bilinéaires symétriques. On dit que $f$ et $f'$ sont équivalentes, noté $f \sim f'$, si :

$$\exists\, u \in GL(E), \forall\, x, y \in E,\; f(u(x), u(y)) = f'(u(x), u(y))$$

Si $q$ et $q'$ sont leurs formes quadratiques, on écrira dans ce cas : $q \sim q'$.

**Proposition 25.** *$\sim$ est une relation d'équivalence.*

**Proposition 26.** *Si $q \sim q'$, alors $O(q) \cong O(q')$.*

**Proposition 27.** *Si $q \sim q'$, alors $\operatorname{rg} q = \operatorname{rg} q'$, $\nu(q) = \nu(q')$, et si $\mathcal{B}$ est une base de $E$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\det Mat_{\mathcal{B}}(q) = \alpha^2 \det Mat_{\mathcal{B}}(q')$.*

## 2) Classification des formes quadratiques pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

**Définition 28.** Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base orthogonale pour $q$. On pose $p = \operatorname{Card}\big\{i \in [\![1, n]\!] \bigm| q(u_i) > 0\big\}$.

**Théorème 29.** *Le couple $(p, n-p)$ est indépendant de la base choisie. On l'appelle la signature de $q$.*

**Théorème 30.** *Il y a $n+1$ classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur $E$. Dans une base convenable, on a $Mat(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$. De plus, $\nu(q) = \min(p, n-p)$.*

## 3) Classification des formes quadratiques pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos

**Théorème 31.** *Toutes les formes quadratiques non dégénérées sont équivalentes. Dans une base convenable, elles ont pour matrice l'identité. De plus, $\nu = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

**Exemple 32.** *Pour toute forme quadratique $q : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, avec $\mathbb{K}$ algébriquement clos, on a :*

$$O(q) \cong \big\{P \in GL_n(\mathbb{K}) \bigm| {}^{\mathrm{t}}PP = I_n\big\} = O_n(\mathbb{K})$$

## 4) Classification des formes quadratiques pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$

**Définition 33.** On pose :

$$\mathbb{F}_q^2 = \big\{x^2 \in \mathbb{F}_q \bigm| x \in \mathbb{F}_q\big\} \quad \text{et} \quad \mathbb{F}_q^{2\star} = \mathbb{F}_q^2 \cap \mathbb{F}_q^\star$$

**Théorème 34.** *Soient $a, b \in \mathbb{F}_q^\star$. Alors l'équation en $x, y$ : $ax^2 + by^2 = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{F}_q$.*

**Théorème 35.** *Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\star \setminus \mathbb{F}_q^{2\star}$. Il y a deux classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées, de matrices :*

$$Q_1 = I_n \quad \textit{et} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

*Une forme $Q$ est de l'un ou l'autre type suivant que $\det Mat(Q)$ est, ou non, un carré de $\mathbb{F}_q^\star$.*

# III Applications

## 1) Géométrie

**Théorème 36.** *Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}n$, on note $Vol(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$, alors :*

$$Vol(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

**Lemme 37.** *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives, et $\alpha, \beta \geqslant 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, alors :*

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$$

**Application 38** (Ellipsoïde de John-Loewner)**.** *Soit $K$ un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}n$, alors il existe un unique ellipsoïde de centre 0 et de volume minimal contenant $K$.*

## 2) Géométrie différentielle

**Lemme 39.** *Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage $V$ de $A_0$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V, GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $A \in V$, on a ${}^{\mathrm{t}}\rho(A) A_0 \rho(A)$.*

**Théorème 40** (Lemme de Morse)**.** *Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, telle que $df_0 = 0$ et $d^2 f_0$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, liés par un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : x \mapsto u$, avec $\varphi(0) = 0$ et :*

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2 = \sum_{i=1}^{p} u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2$$

# Développements

- Ellipsoïde de John-Loewner (37,38) [FGN]
- Lemme de Morse (39,40) [Rou]

# Références

[Per] Daniel Perrin. *Cours d'Algèbre.* Ellipses

[Rou] François Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini

[CG] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 2.* Calvage et Mounet

[FGN] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 3.* Cassini